

SÓLITONS EM REDES NÃO-LINEARES

Fernando Martins de Gouveia¹

fernando.martins.gouveia@gmail.com

Faculdade de Tecnologia de São Paulo, Fatec-SP

Regina Maria Ricotta

regina@fatecsp.br

Faculdade de Tecnologia de São Paulo, Fatec-SP

1. INTRODUÇÃO

Um *sóliton* é uma onda solitária que conserva a forma e a velocidade enquanto se propaga. Além disso, não é afetado por colisões com outras ondas solitárias. Matematicamente, trata-se de uma solução exata para a equação de onda, dispersiva, não linear e localizada [1]. O estudo de *solitons* está bem relacionado à teoria de sistemas complexos, onde existe a interação entre múltiplos elementos acoplados e essa interação pode gerar fenômenos emergentes, como caos, *sólitons*, fractais e meta/multiestabilidade. Este trabalho tem como objetivo estudar as amplitudes de oscilação de uma rede de pêndulos que, após certas aproximações, tem o comportamento descrito pela equação de Sine-Gordon cuja solução é do tipo *sóliton*. Essa equação aparece também em diversos outros sistemas com inúmeras aplicações científicas e tecnológicas, sendo uma de grande destaque a dinâmica de uma junção supercondutora de Josephson, associada à computação quântica.

2. MÉTODOS E MATERIAIS

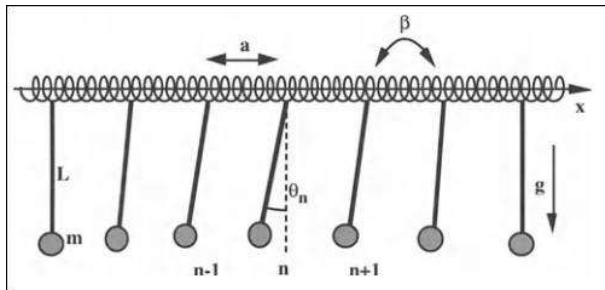


Figura 1: Rede de pêndulos acoplados por molas [1].

O sistema estudado é uma rede com N pêndulos idênticos [2] de massa m , comprimento L e distância a entre os seus vizinhos, que estão acoplados por molas,

Figura 1. Pode-se chegar à equação de movimento desse sistema a partir da energia total, dada pela Hamiltoniana H do sistema. A energia cinética para as rotações de cada pêndulo é dada por $\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta_n}{dt} \right)^2$ onde I é o momento de inércia e θ_n é o ângulo de oscilação em torno do eixo para o n -ésimo pêndulo. A energia potencial gravitacional é dada por $mgL(1 - \cos\theta_n)$ e a energia potencial de acoplamento pode ser obtida considerando os torques de torsão restauradora β dos vizinhos mais próximos para o pêndulo n portanto tem-se:

A Hamiltoniana completa do sistema é então expressa como:

$$H = \sum_{n=1}^N \left[\frac{I}{2} \left(\frac{d\theta_n}{dt} \right)^2 + mgL(1 - \cos\theta_n) + \frac{\beta}{2} (\theta_n - \theta_{n+1})^2 \right] \quad (1)$$

Resta derivar em relação ao tempo. Já que o sistema é conservativo, tem-se $\frac{dH}{dt} = 0$. Isso resulta nas equações de movimento não lineares acopladas da rede:

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} + \beta(2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1}) + mgL \sin\theta_n = 0 \quad (2)$$

A equação (2) não tem solução exata, mas para pequenas oscilações o sistema discreto transforma-se em um sistema contínuo, $\theta_n(t) \rightarrow \theta(x,t)$. Esta aproximação do contínuo é válida quando o comprimento de onda das excitações é muito maior que a distância entre pêndulos adjacentes, ou seja, quando $\lambda \gg a$.

Através de uma expansão de Taylor em torno do ponto $x = na$:

$$\theta_{n\pm 1} = \theta \pm a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \pm \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + \dots \quad (3)$$

Substituindo na equação (2) e mantendo apenas termos até segunda ordem em a , temos:

$$\theta_{n-1} + \theta_{n+1} \approx 2\theta + a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4)$$

Portanto, o termo de acoplamento se torna:

$$\beta(2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1}) \approx -\beta a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (5)$$

pode-se mostrar que a equação (2) passa a ser:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad (6)$$

onde $c_0^2 = \beta a^2 / I$ representa a velocidade de propagação das ondas não lineares na rede e $\omega_0^2 = mgL / I$ é a frequência angular natural de um pêndulo individual. Esta é a equação de Sine-Gordon.

3. RESULTADOS

A equação (6) admite soluções exatas e pode ser resolvida através da seguinte substituição de variáveis: $z = x - vt$, que representa uma onda que se propaga com velocidade constante v . Esta transformação reduz a equação diferencial parcial a uma equação diferencial ordinária. Aplicando-se a regra da cadeia e, a equação (6) se reduz a

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{\omega_0^2}{(c_0^2 - v^2)} \sin(\theta) = 0 \quad (7)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação (7) por $\frac{d\theta}{dz}$ e integrando-se uma vez em relação a z , obtém-se:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{(c_0^2 - v^2)} \cos(\theta) + C_1 = 0 \quad (8)$$

Onde C_1 é constante de integração.

Para se obter uma solução localizada, ou seja, $\theta \rightarrow 0$ enquanto $z \rightarrow \infty$, aplicamos as condições de contorno:

$\theta(\pm\infty) = 0$ e $\frac{d\theta}{dz}(\pm\infty) = 0$. Isso implica que

$$C_1 = \frac{\omega_0^2}{(c_0^2 - v^2)}.$$

O resultado disso é que a equação (8) é reescrita como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{(c_0^2 - v^2)} (1 - \cos \theta) = 0 \quad (9)$$

Usando a identidade trigonométrica $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ e separando as variáveis, obtém-se

$$\frac{d\theta}{\sin(\theta/2)} = \pm 2 \frac{\omega_0}{\sqrt{c_0^2 - v^2}} dz \quad (10)$$

Integrando-se novamente e aplicando as condições iniciais apropriadas, obtém-se:

$$\theta(x, t) = 4 \arctan \left(\exp \left(\pm \frac{\omega_0(x - vt)}{c_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \right) \right) \quad (11)$$

que são as soluções sólton kink, Figura 2, (sinal positivo) e *antikink* (sinal negativo). A Figura 3 ilustra um *kink* de gelo na natureza.

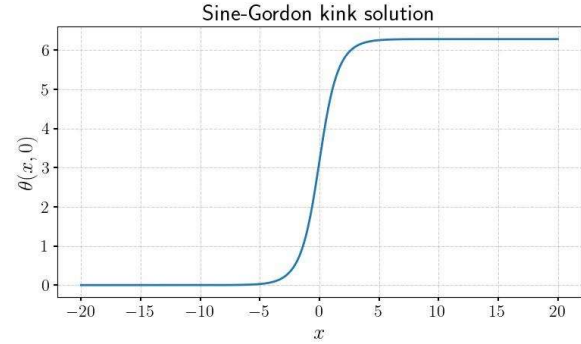


Figura 2: Solução Sine-Gordon kink em $t = 0$ realizada em Python com a biblioteca *Matplotlib* [2].

A solução *kink* representa uma transição suave de $\theta = 0$ para $\theta = 2\pi$, correspondendo a uma rotação completa de um pêndulo. Note que $v < c_0$, impondo um limite de velocidade para a propagação do *sólton*.



Figura 3: Kink de gelo, formado naturalmente pelo acúmulo de neve sobre uma barra horizontal [3]

4. CONCLUSÕES

Uma rede de pêndulos acoplados por molas pode, após algumas aproximações, ser modelada pela equação de Sine-Gordon e sua dinâmica se comporta, aproximadamente, como um *sólton*. No limite de pequenas oscilações as soluções *kink* e *antikink* representam modos de excitação não lineares que se propagam sem dispersão, mantendo

sua forma durante a propagação. A existência dessas soluções depende do balanço entre não linearidade e dispersão no sistema. Este estudo demonstra como sistemas mecânicos clássicos podem exibir comportamentos solitônicos complexos, com implicações para a compreensão de fenômenos similares em outras áreas da física.

REFERÊNCIAS

- [1.] M. Remoissent, Waves called solitons, Springer, 1999. Pag. 11.
- [2.] F. M. de Gouvea, Plot da solução kink, 2024. Disponível em: github.com/fern4ndomartins/solitons.
- [3.] T. Dauxois and M. Peyrard, Physique des solitons, Cambridge University Press, 2006. Pag. 39-48.

¹ Aluno de Iniciação Científica, CNPq-PIBIC